

**UNIVERZITET CRNE GORE**  
**Elektrotehnički fakultet, Podgorica**

Materijal sa devetog termina predavanja iz

**EKSPERTNIH SISTEMA**

**PREDIKATSKA LOGIKA**

Prof. dr Vesna Popović-Bugarin

Podgorica, 2017.

# PREDIKATSKA LOGIKA

## 4.1 Razlika između predikatske i propozicione logike

Propoziciona logika je suviše slab jezik za predstavljanje na koncizan način znanja o kompleksnom životnom okruženju. S druge strane predikatska logika – logika prvog reda (first order predicate calculus – FOPC) je dovoljno izražajna da predstavi veliki dio uobičajenog znanja. Naime, u iskaznom računu svaki atomski simbol ( $P$ ,  $Q$ , itd) je nesvodljivi iskaz određene složenosti. Ne postoji način da se koriste komponente pojedinačnih atomskih iskaza. Predikatski račun dozvoljava tu mogućnost. Dakle, umjesto da iskazni simbol  $P$  označava cijelu rečenicu „*U utorak je padala kiša*“, može se kreirati predikat vrijeme, koje opisuje vezu između meteoroloških uslova i dana  $vrijeme(utorak, kiša)$ . U predikatskoj logici se koriste pojedinačne komponente iskaza kako bi se pomoću pravila zaključivanja izvodile nove rečenice. Predikatski račun takođe dozvoljava i korišćenje promjenljivih u iskazima. Promjenljive dozvoljavaju da se kreiraju opšte tvrdnje o klasama objekata. Tako se može tvrditi da sve vrijednosti za  $x$ , gde je  $x$  dan u nedjelji, rečenica  $vrijeme(x, kiša)$  je istinita, na primjer kiša pada svaki dan [1], dok bi u propozicionoj logici morali pisati po jedan iskaz za svaki dan u nedjelji.

Propoziciona logika je deklarativan jezik, obzirom da je njena semantika zasnovana na istinitosnoj relaciji između rečenica i mogućeg stanja svijeta – modela [2]. Ona je takođe dovoljno moćna da može rukovati djelimičnim informacijama, koristeći disjunkciju i negaciju. Propoziciona logika posjeduje i treće svojstvo (koje nije ranije pominjano), a to je kompozicionalnost. U kompozicionim jezicima, značenje rečenice je funkcija značenja njenih djelova. Ukoliko bi imali složeni iskaz tipa  $A \wedge B$ , očigledno je da bi njegovo značenje bilo povezano sa značenjem iskaza  $A$  i  $B$ . Međutim, propoziciona logika nema dovoljno jaku sposobnost izražavanja potrebnu za opisivanje okruženja sa velikim brojem objekata. Za svaki objekat bi se moralo pisati zasebno pravilo. S druge strane, prirodni jezik je dovoljno izražajan, ali ima nedostatke u smislu zavisnosti značenja neke rečenice od konteksta i dvosmislenosti rečenica. Za formiranje predikatske logike pozajmljena je mogućnost velike izražajnosti iz prirodnog jezika, dok su izbjegnute njegove mane. Naime, predikatska logika kao osnovu ima deklarativnu, kompozicionu semantiku, koja je nezavisna od konteksta i nedvosmislena, a nad kojom je izgrađena izražajnija logika u odnosu na propozicionu logiku (pozajmljena iz prirodnih jezika).

Postavlja se pitanje šta to čini prirodne jezike bogatim u smislu izražajnosti. Ukoliko se pogleda sintaksa prirodnih jezika, vidi se da su najočigledniji elementi imenice i imenične fraze koje se odnose na neke objekte (čovjek, napadač, kvadrat, itd) i glagoli i glagolske fraze koje se odnose na relacije među objektima (je u blizini, je u susjednoj ćeliji, puca, itd). Neke od relacija među objektima su funkcije – relacije u kojima postoji samo jedna „vrijednost“ za dati „unos“. Samo jedan objekat zadovoljava relaciju, i on je rezultat funkcije.

Primjeri objekata, relacija i funkcija bi bili [2]:

- Objekti: ljudi, kuće, brojevi, teorije, utakmice, ratovi, vjekovi, ...

- Relacije: mogu biti unarne relacije ili svojstva kao: crveno, okruglo, prividno, prosto, ..., ili relacije *n-tog* reda kao što su: brat od, veći od, unutar, dio od, ima boju, nastao nakon, posjeduje, nalazi se između, ...
- Funkcije: otac od, najbolji prijatelj, jedan više nego (plus), početak od, ...

Zaista, gotovo svaka tvrdnja se može posmatrati kao iskaz koji se odnosi na objekte i svojstva ili relacije među njima. Na primjer tvrdnju: "Zli kralj John je vladao Engleskom 1200. godine" možemo posmatrati kao iskaz u kojem su John, Engleska, 1200. objekti, vladati je relacija između kralja Johna i Engleske, dok su zli i kralj osobine (unarni predikati). Drugi primjer bi bila rečenica "Jedan plus dva je jednako tri". Ovdje su objekti: jedan, dva, jedan plus dva i tri; relacija je jednako; dok je plus funkcija. Kasnije će biti detaljnije objašnjen smisao funkcija u predikatskoj logici. U posmatranoj rečenici funkcija plus, sa argumentima jedan i dva (jedan plus dva), zapravo predstavlja složeno ime objekta koji se dobija primjenom funkcije plus nad objektima jedan i dva. Tri je još jedno ime ovog objekta.

Osnovna razlika između propozicione i predikatske logike prvog reda leži u tome šta koja logika podrazumijeva pod prirodnom realnosti. Propoziciona logika smatra da postoje samo činjenice koje važe ili ne važe u posmatranom stanju svijetu – modelu. Svaka činjenica može biti u dva stanja: istina ili neistina. Logika prvog reda podrazumijeva više, da se svijet sastoji od objekata sa određenim relacijama koje postoje ili ne postoje među njima.

Logika za specijalnu namjenu može ići i u dublja obavezivanja. Za vremensku logiku, na primjer, podrazumijeva se da je neka činjenica istinita u određeno vrijeme i da je to vrijeme (koje može biti interval ili trenutak) poznato. U logici višeg reda, relacije i funkcije ustanovljene logikom prvog reda se smatraju objektima.

## 4.2 Sintaksa i semantika predikatske logike prvog reda

Modeli u propozicionoj logici su skupovi istinitosnih vrijednosti za propozicione simbole. Modeli logike prvog reda su interesantniji [2]. Prvo, oni posjeduju objekte. **Domena modela** (D) je skup objekata koje model posjeduje; ovi objekti se ponekad nazivaju elementima domena. Objekti u modelu mogu biti povezani na različite načine. Formalno govoreći, relacija – povezanost je skup **uređenih** *n*-torki objekata na koje se ta relacija odnosi. Tako bi relacija bratstvo bila skup koji čine dva uređena para objekata (elementi skupa se pišu unutar vitičastih zagrada):

*{(Richard Lavlje srce, Kralj John), (Kralj John, Richard Lavlje srce)}*

Za realizaciju određene vrste relacija najpogodnije su funkcije jer se njima data relacija povezuje sa tačno jednim objektom.

Sada se na koncizan način mogu predstaviti osnovni sintaksni elementi predikatske logike. **Osnovni sintaksni elementi** logike prvog reda su **simboli** koji predstavljaju objekte, relacije ili funkcije. Simboli su nesvodljivi sintaksni elementi: ne mogu se rastaviti na komponente pomoću dozvoljenih operacija jezika. Za označavanje simbola predikatske logike koriste se nizovi slova i cifara, koji obavezno počinju slovom. Prazna mjesta i nealfanumerički znaci se ne smiju pojavljivati u nizu karaktera. Može se koristiti podcrta "\_" za poboljšavanje čitljivosti [1].

Mi ćemo prihvatiti konvenciju kojom se konstantni i predikatski simboli obilježavaju velikim slovima, a funkcijski simboli malim slovima [3]. Za označavanje konstantnih simbola se najčešće koriste slova sa početka alfabeta ili imena sa željenim mnemoničkim značenjem. Tako bi konstantni simboli bili: A, B, PETAR, MILAN; predikatski simboli bi bili: BRAT, OSOBA, a funkcijski simboli bi bili otac, majka. Dakle, postoje tri vrste simbola [2]:

- **Konstantni simboli** kojima se imenuju specifični elementi u domenu. Predstavljaju objekte, apstrakcije (ideje, stanovišta, skupovi podataka) [3];
- **Predikatski simboli** kojima se imenuju relacije unutar domena – predikati. Predikat označava da je neki element povezan sa jednim ili više drugih elemenata u domenu na određeni način ili da posjeduje neko svojstvo. Vrijednosti su im istina i neistina. Stoga se može reći da predikatski simboli označavaju relaciju ili funkcionalno mapiranje elemenata domena  $D$  u istinitosne vrijednosti: istina, neistina [4]. Uz svaki predikatski simbol se vezuje i broj argumenata. Argumenti identifikuju povezane elemente i pišu se unutar običnih zagrada, i odvojeni su zarezima, npr: STARII(MILAN, PETAR), čime se dobija binarni predikat. Unarni predikat bi bio COVJEK(MILAN). Jasno je da se kod višedimenzionih predikata mora voditi računa o redosljedu objekata. Naravno, postoje predikati kojima se označava simetrična relacija, i značenje ne zavisi od redosljeda objekata na koje se data relacija odnosi. Kada se biraju imena predikata treba se opredijeliti za ona koja imaju željeno mnemoničko značenje.
- **Funkcijski simboli** kojima se imenuju funkcije. Funkcija označava relaciju definisanu na domenu  $D$ . One mapiraju  $n$  ( $n > 0$ ) elemenata u jedan element domena: „otac od“, „godine od“. Argumenti funkcije se pišu unutar običnih zagrada i predstavljaju izraze preko kojih se identifikuje element domena (konstanta, funkcija, ...), npr. otac(PETAR) - jedinstveni element koji je otac PETRA; otac(otac(PETAR)) - jedinstveni element koji je otac PETROVOG oca – djeda [3] su primjeri funkcija.

Sintaksni elementi logike prvog reda su i **variable – promjenljive**. Variable predstavljaju član domena, ne specificirajući pri tome neki poseban element. Dakle, koriste se za definisanje opštih klasa objekata i osobina. Obilježavaju se malim slovima, najčešće sa kraja alfabeta. Primjeri varijabli bi bili:  $x$ ,  $y$ , bolest – nespecificirana bolest, težina – bez specifikacije.

Sada se može dati definicija za termine. **Term** je logički izraz koji se odnosi na neki objekat. Konstantni simboli i variable su stoga termovi. Međutim, nije uvijek pogodno imati različite simbole kako bi se imenovali svi objekti. Tako bi na primjer, u prirodnom jeziku prije upotrijebili izraz „Petrova lijeva noga“, nego što bi davali neki konkretan naziv njegovoj nozi. Za to nam upravo i služe funkcije: umjesto da koristimo konstantni simbol, možemo koristiti funkciju lijeva\_noga(PETAR). Kompleksni term se, u opštem slučaju, formira funkcijskim simbolom, nakon kojeg se pišu obične zagrade, unutar kojih je data lista argumenata za navedeni funkcijski simbol. Bitno je zapamtiti da je kompleksni term samo složena vrsta imena [2]. To nije poziv „subrutine“ koja „vraća vrijednost“. Naime, ne postoji subrutina lijeva\_noga koja uzima osobu kao stvarni argument i vraća odgovarajuću nogu. U predikatskoj logici se o lijevoj nozi može rezonovati bez obezbijedivanja definicije za funkciju lijeva\_noga (t.j. tvrditi da važi generalno pravilo po kojem svako ima lijevu

nogu i zaključiti dedukcijom da je i Petar mora imati). Ovo je nešto što se ne može učiniti sa subrutinama u standardnim programskim jezicima.

Formalna semantika termova je jasna. Neka se posmatra term  $f(t_1, \dots, t_n)$ , gdje se funkcijski simbol  $f$  odnosi na neku funkciju u posmatranom modelu; termovi argumenata se odnose na objekte u domenu modela (nazovimo ih  $d_1, \dots, d_n$ ); a cio term se odnosi na objekat koji je vrijednost funkcije  $f$  primijenjene na  $d_1, \dots, d_n$ .

Term se definiše rekurzivno kao konstanta, varijabla ili rezultat primjene funkcije na term. Dakle,  $A, x, f(x), f(g(x))$  su termovi. Sada se može zaključiti da u prethodnoj definiciji formalne semantike termova, argumenti funkcije  $d_1, \dots, d_n$ , s obzirom da su termovi, mogu biti variable, konstantni simboli ili simboli funkcije.

Možemo reći da je **model u predikatskoj logici** definisan skupom objekata, njihovim osobinama, relacijama među njima, kao i funkcijama koje mogu biti primijenjene.

**Atomska rečenica – atomski predikat** se formira predikatskim simbolom nakon kojeg se pišu obične zagrade u kojima se nalazi lista termova koji identifikuju povezane elemente domena, na primjer  $BRAĆA(MARKO, JANKO)$ . Ovim se tvrdi da su Marko i Janko braća. Atomska rečenica može imati kompleksne termove kao argumente, tako se rečenica  $VJENČANI(majka(MARKO), otac(JANKO))$  smatra atomskom rečenicom, jer je nesvodljiva.

**Složene rečenice** se dobijaju korišćenjem logičkih simbola povezivanja ( $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ ), na isti način kao u propozicionoj logici. Prioritet logičkih simbola je isti kao u propozicionoj logici i odgovara redosljedu kojim su ovdje navedeni. Semantika ovako dobijenih rečenica je ista kao u propozicionoj logici.

Zagrade " $( )$ " i zarezi " $,$ " se u predikatskoj logici koriste za konstrukciju pravilno formiranih izraza i ne označavaju objekte i relacije u stvarnom svijetu. Oni se nazivaju nepravim simbolima [1]. Često se za njih koristi i naziv ograničavači.

**Kvantifikatori** se koriste u slučaju kada se želi iskazati svojstvo cijele kolekcije objekata, bez navođenja objekata poimenice. Logika prvog reda posjeduje dva kvantifikatora i to: **univerzalni i egzistencijalni** kvantifikator.

- Univerzalni kvantifikator,  $\forall$  (svaki, za sve, for all), ukazuje da je rečenica na koju se odnosi istinita za svaku vrijednost promjenljive sa kojom je vezan, a koja pripada domenu modela. Tako se u predikatskoj logici rečenica „Svi vole sladoled“ može predstaviti kao  $\forall x VOLI(x, SLADOLED)$ .
- Egzistencijalni kvantifikator,  $\exists$  (postoji, za neki, exist), pokazuje da je rečenica istinita za jednu ili više vrijednosti domena. Tako se rečenica „Postoje Petrovi prijatelji“ (ili Petar ima prijatelje) može zapisati kao  $\exists y PRIJATELJ(y, PETAR)$  je istinita samo za neke objekte  $y$  – samo su neki objekti Petrovi prijatelji. Ovdje se smatra da su svi elementi domena modela ljudi, pa je  $y$  čovjek samim tim što predstavlja neki element domena modela. Nema potrebe za provjerom. To neće uvijek biti slučaj. Elementi domena mogu biti različite prirode – pripadati različitim klasama.

Pomoću uvedenih kvantifikatora se mogu formirati složene rečenice tipa „Za svako  $x$  važi da ako je  $x$  kralj, onda je  $x$  čovjek“, što bi se u predikatskoj logici pisalo kao  $\forall x KRALJ(x) \Rightarrow \check{C}OVJEK(x)$ . Intuitivno smo zaključiti da iskaz oblika  $\forall x P$ , gdje je  $P$  bilo koji logički iskaz, znači da je  $P$  istinito za svaki objekat  $x$ . Ovo se može

definisati i preciznije. Naime,  $\forall x P$  je istinito u datom modelu, za datu interpretaciju, ukoliko je  $P$  istinito za sve **proširene interpretacije**, pri čemu svaka **proširena interpretacija specificira element domena modela na koji se  $x$  odnosi** [2]. Neka se sada posmatra model koji se sastoji od: objekata koji čine domen modela: {KRUNA, JOHN, lijeva\_noga(JOHN), lijeva\_noga(RIČARD\_LAVLJE\_SRCE), RIČARD\_LAVLJE\_SRCE}, funkcije – lijeva\_noga i relacija – BRAT, KRALJ, ČOVJEK, KRUNA i NA\_GLAVI. Interpretacija  $x$ -a se može proširiti na pet načina:

1.  $x \rightarrow$  KRUNA,
2.  $x \rightarrow$  KRALJ\_JOHN,
3.  $x \rightarrow$  RIČARD\_LAVLJE\_SRCE,
4.  $x \rightarrow$  lijeva\_noga(KRALJ\_JOHN),
5.  $x \rightarrow$  lijeva\_noga(RIČARD\_LAVLJE\_SRCE).

Sada se za iskaz sa univerzalnim kvantifikatorom –  $\forall x KRALJ(x) \Rightarrow \check{C}OVJEK(x)$  – može reći da je istinit u originalnoj interpretaciji, ukoliko je iskaz  $KRALJ(x) \Rightarrow \check{C}OVJEK(x)$  istinit u svakoj od pet proširenih interpretacija. Odnosno, univerzalni kvantifikator je ekvivalentan tvrđenju da važi sljedećih pet rečenica:

1. *Ričard lavlje srce je kralj  $\Rightarrow$  Ričard lavlje srce je čovjek.*
2. *Kralj John je kralj  $\Rightarrow$  Kralj John je čovjek.*
3. *Ričardova lijeva noga je kralj  $\Rightarrow$  Ričardova lijeva noga je čovjek.*
4. *Kralja Johna lijeva noga je kralj  $\Rightarrow$  Kralja Johna lijeva noga je čovjek.*
5. *Kruna je kralj  $\Rightarrow$  Kruna je čovjek.*

Pogledajmo sada pažljivo ovih pet tvrdnji. S obzirom da je u datom modelu samo Kralj John kralj, druga rečenica tvrdi da je on čovjek. Sada se postavlja pitanje šta sa preostale četiri rečenice, u kojima se vrši tvrdnja o nogama i krunama ... Da li i one mogu biti posmatrane kao dio značenja „Svi kraljevi su ljudi“? Zvuči čudno, ali i preostale četiri tvrdnje su istinite u datom modelu, ali se takođe njima ne vrše nikakve tvrdnje o kvalifikaciji čovječnosti noge, krune ili Ričarda. To je iz razloga što nijedan od ovih objekata nije kralj. Ukoliko se ima na umu tabela istinitosti za logičku implikaciju  $\Rightarrow$  vidi se da je implikacija istinita kada god je premisa neistinita, bez obzira na istinitost zaključka. Stoga, iskazivanjem tvrdnji u vidu rečenica sa univerzalnim kvantifikatorom, što je ekvivalentno tvrđenjem da važi cijela lista individualnih implikacija, potvrđujemo zaključak pravila samo za one objekte za koje je premisa istinita, a ne govoreći ništa o onim individualnim objektima za koje premisa nije istinita. **Ispostavlja se da je tabela istine za implikaciju  $\Rightarrow$  idealna za pisanje generalnih pravila sa univerzalnim kvantifikatorima.**

Uobičajena greška, koju prave inženjeri znanja jeste korišćenje konjunkcije umjesto implikacije za pisanje pravila sa univerzalnim kvantifikatorom. U tom bi slučaju prethodna rečenica postala:  $\forall x KRALJ(x) \wedge \check{C}OVJEK(x)$ , što bi bilo ekvivalentno tvrđenju:

1. *Ričard lavlje srce je kralj  $\wedge$  Ričard lavlje srce je čovjek.*
2. *Kralj John je kralj  $\wedge$  Kralj John je čovjek.*
3. *Ričardova lijeva noga je kralj  $\wedge$  Ričardova lijeva noga je čovjek.*
4. *Kralja Johna lijeva noga je kralj  $\wedge$  Kralja Johna lijeva noga je čovjek.*

5. *Kruna je kralj*  $\wedge$  *Kruna je čovjek*,

što ne odgovara onome što želimo iskazati rečenicom sa univerzalnim kvantifikatorom.

Slično rezonovanje se može izvršiti i za egzistencijalni kvantifikator. Rečenice oblika  $\exists x P$  iskazuju da je  $P$  istinito za makar jedan objekat  $x$  iz domena modela. I ovo se može iskazati preciznije:  $\exists x P$  je istinito u datom modelu, za datu interpretaciju, ukoliko je  $P$  istinito u makar jednoj proširenoj interpretaciji koja dodjeljuje  $x$ -u neki element domena modela [2]. Ukoliko bismo željeli reći da „Kralj John ima krunu na svojoj glavi“, zapisali bi:

$$\exists x (KRUNA(x) \wedge NA\_GLAVI(x,JOHN))$$

Imajući na umu navedeno tumačenje značenja iskaza sa egzistencijalnim kvantifikatorom, dati iskaz znači da makar jedan od sljedećih iskaza mora biti istinit:

1. *Ričard lavlje srce je kruna*  $\wedge$  *Ričard lavlje srce je na John-ovoj glavi*.
2. *Kralj John je kruna*  $\wedge$  *Kralj John je na John-ovoj glavi*.
3. *Ričardova lijeva noga je kruna*  $\wedge$  *Ričardova lijeva noga je na John-ovoj glavi*.
4. *Kralja Johna lijeva noga je kruna*  $\wedge$  *Kralja Johna lijeva noga je na John-ovoj glavi*.
5. *Kruna je kruna*  $\wedge$  *Kruna je na John-ovoj glavi*.

Peta tvrdnja je istinita u proširenoj interpretaciji, tako da je početna rečenica sa egzistencijalnim kvantifikatorom  $\exists x (KRUNA(x) \wedge NA\_GLAVI(x,JOHN))$  istinita u datom modelu. Može se primijetiti da bi navedena rečenica bila istinita i u modelu u kojem bi kralj John nosio dvije krune. **Sada se zaključuje da je konjunkcija idealna za pisanje iskaza u kojima se koristi egzistencijalni kvantifikator.**

Korišćenje konjunkcije u rečenicama sa univerzalnim kvantifikatorom bi dovelo do postavljanja jačih-strožijih iskaza, dok bi korišćenje implikacije u rečenicama sa egzistencijalnim kvantifikatorima dovelo do postavljanja slabijih iskaza. Tako bi:  $\exists x KRUNA(x) \Rightarrow NA\_GLAVI(x,JOHN)$  značilo da je makar jedna od sljedećih tvrdnji istinita:

1. *Ričard lavlje srce je kruna*  $\Rightarrow$  *Ričard lavlje srce je na John-ovoj glavi*.
2. *Kralj John je kruna*  $\Rightarrow$  *Kralj John je na John-ovoj glavi*.
3. *Ričardova lijeva noga je kruna*  $\Rightarrow$  *Ričardova lijeva noga je na John-ovoj glavi*.
4. *Kralja Johna lijeva noga je kruna*  $\Rightarrow$  *Kralja Johna lijeva noga je na John-ovoj glavi*.
5. *Kruna je kruna*  $\Rightarrow$  *Kruna je na John-ovoj glavi*.

Imajući na umu da je implikacija istinita ukoliko su i premisa i zaključak istiniti, ili ukoliko je premisa neistinita, već na osnovu prvog iskaza iz ovog primjera bi mogli zaključiti da je navedena rečenica sa egzistencijalnim kvantifikatorom tačna. Odnosno, rečenica sa egzistencijalnim kvantifikatorom bi bila istinita u bilo kojem modelu u kojem postoji objekat za koji je premisa implikacije neistinita. Očigledno je da se ovakvim rečenicama ne bi mnogo kazalo [2].

Često će se javljati potreba za iskazivanjem kompleksnih rečenica korišćenjem većeg broja kvantifikatora. Najjednostavniji slučaj je kada su upotrijebljeni kvantifikatori istog tipa. Na primjer: „Braća su rođaci“ se može pisati kao:

$$\forall x \forall y \text{BRAĆA}(x, y) \Rightarrow \text{ROĐACI}(x, y).$$

Naizmjenični kvantifikatori istog tipa se mogu pisati kao jedan kvantifikator sa više varijabli. Na primjer da bi kazali da je rođaci simetrična relacija, možemo pisati:

$$\forall x, y \text{ROĐACI}(x, y) \Rightarrow \text{ROĐACI}(y, x).$$

Biće i slučajeva kada je potrebno koristiti kvantifikatore različitog tipa. Tako se može pojaviti rečenica tipa “Svako voli nekoga”, koja zapravo znači da za svaku osobu postoji makar neko koga ta osoba voli:

$$\forall x \exists y \text{VOLI}(x, y).$$

S druge strane da bi se reklo „Postoji neko koga svi vole“, pišemo:

$$\exists y \forall x \text{VOLI}(x, y)$$

Iz dva posljednja primjera je jasno da je redosljed kvantifikatora jako bitan. On postaje jasniji kada se koriste zagrade.  $\forall x (\exists y \text{VOLI}(x, y))$  govori da **svako** posjeduje određeno svojstvo; da voli nekoga – postoji neko koga voli. S druge strane  $\exists y (\forall x \text{VOLI}(x, y))$  kaže da **neko** u svijetu posjeduje određeno svojstvo; da ga svi vole.

Konfuzija može nastati kada se dva kvantifikatora koriste sa varijablama koje imaju isto ime. Posmatrajmo rečenicu:

$$\forall x [\text{KRUNA}(x) \vee (\exists x \text{BRAT}(\text{RICHARD}, x))].$$

Ovdje je  $x$  u  $\text{BRAT}(\text{RICHARD}, x)$  egzistencijalno kvantifikovano. **Pravilo je da varijabla pripada najbližem kvantifikatoru koji je pominje i da nije objekat bilo koje duge kvantifikacije.** Opseg važenja kvantifikatora je formula koja slijedi. Promjenljive koje se pojavljuju u kvantifikatorima se nazivaju vezanim, inače su slobodne [3]. Prethodna tvrdnja se mogla jednako dobro zapisati i kao:

$$\forall x [\text{KRUNA}(x) \vee (\exists z \text{BRAT}(\text{RICHARD}, z))].$$

Da bi izbjegli zabunu, mi ćemo u ovakvim slučajevima uvijek koristiti različite promjenljive.

**Dva navedena kvantifikatora su zapravo, kroz negaciju, usko povezana jedan sa drugim** [2]. Tvđenje da svi ne vole spanać je isto kao tvđenje da nema nikoga ko ga voli, i obratno:

$$\forall x \neg \text{VOLI}(x, \text{SPANAC}) \text{ je ekvivalentno sa } \neg \exists x \text{VOLI}(x, \text{SPANAC}).$$



Može se ići i korak dalje „Svi vole sladoled“ znači da nema nekoga ko ne voli sladoled:

$\forall x \text{ VOLI}(x, \text{SLADOLED})$  je ekvivalentno sa  $\neg \exists x \neg \text{VOLI}(x, \text{SLADOLED})$ .

Takođe se „Postoji neko ko voli brokoli“, može pisati kao nije istina da svi ne vole brokoli [3]:

$\exists x \text{ VOLI}(x, \text{BROKOLI})$  je ekvivalentno sa  $\neg \forall x \neg \text{VOLI}(x, \text{BROKOLI})$

S obzirom da je  $\forall$  zapravo konjunkcija u univerzumu objekata (proširenoj interpretaciji – u svim proširenim interpretacijama mora biti tačno) a  $\exists$  disjunkcija (makar jedna proširena interpretacija mora biti tačna), oni zadovoljavaju De Morgan-ova pravila, koja se za rečenice u kojima se koriste kvantifikatori mogu pisati kao:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg P \equiv \neg \exists x P & \neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q) \\ \neg \forall x P \equiv \exists x \neg P & \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \\ \forall x P \equiv \neg \exists x \neg P & P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \\ \exists x P \equiv \neg \forall x \neg P & P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q) \end{array}$$

Može se zaključiti da nam nijesu potrebna oba kvantifikatora, na isti način kao što nam nijesu potrebni i konjunkcija i disjunkcija. S obzirom da nam je čitljivost bitnija od štedljivosti ove vrste, zadržavamo oba kvantifikatora.

*Primjer 1. Neka je domen modela (skup objekata): {GARFIELD, FELIKS, računar}. Preslikaj u predikatsku logiku rečenicu: „Sve mačke su sisari.“ [5].*

*Rješenje: Imajući na umu način predstavljanja rečenica sa univerzalnim kvantifikatorom, datu rečenicu treba tumačiti tako da za svu objekte u okviru razmatranja važi: ako su mačke tada su sisari. Postoje elementi domena koji nijesu mačke, dakle moramo uvesti unarni predikat MAČKA. Ovo zapisujemo kao:*

$$\forall x (\text{MAČKA}(x) \Rightarrow \text{SISAR}(x)).$$

*Primjer 2. Preslikaj u predikatsku logiku: „Nijedan čovjek ne voli svu hranu.“*

*Rješenje: Sada možemo definisati predikate koji su nam potrebni:*

1.  $\text{COVJEK}(x)$  – označava relaciju  $x$  je čovjek;
2.  $\text{HRANA}(x)$  – označava relaciju  $x$  je hrana;
3.  $\text{VOLI}(x, y)$  – označava relaciju  $x$  voli  $y$ .

*Primijetimo da su  $x$  i  $y$  variable. Dati problem možemo riješiti na dva ravnopravna načina:*

a) „Ne postoji  $x$  koji je čovjek i takav da voli svu hranu.“

$$\neg \exists x [\text{COVJEK}(x) \wedge \forall y (\text{HRANA}(y) \Rightarrow \text{VOLI}(x, y)) ]$$

b) „Za svako  $x$  važi: ako je čovjek postoji hrana (bar jedna) koju ne voli”

$$\forall x [COVJEK(x) \Rightarrow (\exists y (HRANA(y) \wedge \neg VOLI(x, y)))]$$

Sada se može definisati šta je **dobro formirana formula** – **DFF** u predikatskoj logici, odnosno šta je ispravno definisan složeni predikat [5]:

1. Svaki atomski predikat je DFF.
2. Formule povezane sa  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  su DFF (na primer  $\neg A$ ,  $A \wedge B$ ,  $B \vee C$ ,  $C \Rightarrow D$ ).
3. Formule okružene kvantifikatorima su takođe DFF, pa ako je  $x$  varijabla, a  $S$  formula, tada su:  $\exists x S(x)$  i  $\forall x S(x)$ , takođe DFF. Ovdje se koristi oznaka  $S(x)$  da bi se označila formula  $S$  u kojoj postoji varijabla  $x$ .

Prethodna definicija DFF se može dopuniti tvrdnjom da su formule  $P(x)$ ,  $Q(x)$  DFF sa varijablom  $x$  [5].

Kao i u propozicionoj logici, negirana ili nenegirana atomska rečenica naziva se **literal**.

Postoje specijalni slučajevi DFF [3]:

1. DFF u kojoj su vezane promjenljive i nazivaju se sentence;
2. DFF koja se sastoji od disjunkcije literala naziva se klauzula.

**Ekvivalencija** ima posebno mjesto u predikatskoj logici. Simbol jednakosti se koristi za naglašavanje da se dva terma odnose na isti objekat. Na primjer  $otac(JOHN) = HENRY$ , označava da su objekat na koji se odnosi  $otac(JOHN)$  i objekat na koji se odnosi  $HENRY$ , zapravo jedan te isti objekat. Usljed činjenice da se ovakvom interpretacijom jednakosti ono na šta ukazuju operandi fiksira na neki konkretan objekat, određivanje istinitosti jednakosti je jednostavno stvar utvrđivanja da ono na šta ukazuju dva posmatrana terma predstavlja jedan isti objekat. Znak jednakosti se stoga može koristiti za utvrđivanje činjenica vezanih za neku funkciju, kao što je upravo i učinjeno kada je u pitanju simbol  $otac$ . Jednakost se takođe može koristiti u kombinaciji sa negacijom da bi se naglasilo da dva terma ne predstavljaju isti objekat. Da bi rekli da Ričard ima bar dva brata, pisali bi:

$$\exists x, y BRACA(x, RICHARD) \wedge BRACA(y, RICHARD) \wedge \neg(x = y).$$

Rečenica:

$$\exists x, y BRACA(x, RICHARD) \wedge BRACA(y, RICHARD),$$

ne bi imala željeno značenje. Naime, mogao bi postojati model u kojem Ričard ima samo jednog brata, a ova rečenica je istinita. Tako bi u prethodno posmatranom modelu u  $x$  i  $y$  mogli dodijeliti vrijednost Kralj John. Dodatak,  $\neg(x = y)$  odbacuje takve modele. Ponekad se kao skraćena za  $\neg(x = y)$ , koristi oznaka  $x \neq y$ .

**Određivanje istinitosti DFF se svodi na interpretaciju u evaluaciju** [5]. Neka je sa  $D$  označen domen modela. **Interpretacija** je proces preslikavanja elemenata iz domena  $D$  svakoj pojedinoj konstanti, varijabli i funkciji, tako da:

- Svakoj konstanti pridruži se jedan element iz  $D$ .

- Svakom funkcijskom simbolu pridruži se jedan element iz  $D$ . Svaka funkcija  $f$ , sa  $m$  argumenata, definiše interpretacijom preslikavanje iz  $D^m$  u  $D$ , t.j.:  $f: D^m \rightarrow D$  (pridruživanje jednog elementa iz  $D$ ).
- Svakoj varijabli se pridruži neprazan podskup iz  $D$  (dozvoljene supstitucije).

Nakon obavljene interpretacije –  $I$ , može se vršiti određivanje istinitosti DFF, na sljedeći način:

1. Simbolu  $T$  uvijek je pridružena istinita vrijednost.
2. Simbolu  $F$  uvijek je pridružena neistinita vrijednost.
3. Svaki predikat  $P$ , s brojem članova  $n$ , definiše interpretacijom i evaluacijom svojih članova preslikavanje iz  $D^n$  u  $\{T, F\}$ , t.j.  $P: D^n \rightarrow \{T, F\}$  (istinito ili neistinito).
4. Vrijednosti DFF formiranih složenim logičkim operatorima date su odgovarajućim istinitosnim tabelama, koje su iste kao u propozicionoj logici.
5. Vrijednost  $\forall x P(x)$  je  $T$ , ako  $P(x)$  je  $T$ , za sve vrijednosti  $x$  date sa  $I$ , a  $F$  inače.
6. Vrijednost  $\exists x P(x)$  je  $T$ , ako  $P(x)$  je  $T$ , barem za jednu vrijednost  $x$  datoj sa  $I$ , a  $F$  inače.

Primjeri pridruživanja istinitosti bi bili:

*PRIJATELJ(IVAN, ANA),*

navedeni predikat je  $T$  (istinit), ako u  $D$  postoji objekt Ana koja je prijatelj Ivanu; Dalje, ukoliko je  $x$  varijabla čiji domen su prirodni brojevi, atomski predikat  $\forall x \text{ VECI}(x, 5)$  je  $F$  (neistinit), dok je atomski predikat  $\exists x \text{ VECI}(x, 5)$   $T$  (istinit). Očigledno je da će se prilikom tumačenja kvantifikatora pojaviti problem u slučajevima kada je domen beskonačan, jer je potrebno izvršiti zamjenu varijabli (osim u slučaju kada je u pitanju neko opšteprihvaćeno znanje, kao u navedenom primjeru – nije bilo potrebe zamijenjivati sve prirodne brojeve iz domena da bi znali da li je posmatrani predikat istinit ili ne).

Sada se može definisati **stanje svijeta** (engl. state of the world) u predikatskoj logici, kao skup svih istinitih predikata iz domena  $D$ .

*Primjer 3. Napisati sljedeće rečenice koristeći predikatsku logiku:*

1. *Medeno srce je keks.*
2. *Marija je dijete koje jede medeno srce.*
3. *Marko voli djecu koja jedu keks.*
4. *Marko voli Mariju.*

*Rješenje: Prethodne rečenice se mogu predstaviti kao:*

1.  $\text{KEKS}(\text{MEDENO\_SRCE})$ .
2.  $\text{DIJETE}(\text{MARIJA}) \wedge \text{JEDE}(\text{MARIJA}, \text{MEDENO\_SRCE})$ .
3.  $\forall x (\text{DIJETE}(x) \wedge \exists y (\text{JEDE}(x, y) \wedge \text{KEKS}(y)) \Rightarrow \text{VOLI}(\text{MARKO}, x))$
4.  $\text{VOLI}(\text{MARKO}, \text{MARIJA})$ .

Prilikom rješavanja navedenog primjera, i odlučivanja šta da se realizuje pomoću predikata, a šta pomoću funkcija, vodilo se računa o tome da rezultat predikata može biti istinit ili neistinit, dok je rezultat funkcije jedan element iz domena modela  $D$ .

### 4.3 Zaključivanje u predikatskoj logici

S obzirom da su već data pravila zaključivanja za propozicionu logiku, logično je postaviti pitanje, da li se ta pravila mogu koristiti i u predikatskoj logici. Ukoliko se pogleda sintaksa predikatske logike, moglo bi se reći da je osnovna razlika u odnosu na propozicionu logiku uvođenje kvantifikatora. Postavlja se pitanje, da li postoji neko rezonovanje, kojim bi se mogli ukloniti kvantifikatori iz iskaza predikatske logike, i dobiti iskazi oblika kao u propozicionoj logici, nad kojima bi se dalje koristila naučena pravila zaključivanja propozicione logike.

#### Pravilo eliminisanja kvantifikatora – Toraf Skolem

- Univerzalni kvantifikator se podrazumijeva, i može se izostaviti. Tako se rečenica „Sve jabuke su hrana“ (aksiom), koja bi se predstavila kao:

$$\forall x (JABUKE(x) \Rightarrow HRANA(x))$$

može zapisati jednostavnije kao:

$$(JABUKE(x) \Rightarrow HRANA(x))$$

- Egzistencijalni kvantifikator se može takođe ukloniti, iako je procedura malo komplikovanija: Kada se egzistencijalni kvantifikator ( $\exists$ ) nalazi ispred promjenljive ( $x$ ), i nije u doseg u univerzalnog kvantifikatora, izostaviti kvantifikator ( $\exists$ ), a promjenljivu  $x$  zamijeniti sa novim konstantnim simbolom koji se ne pojavljuje nigdje drugo u BZ [4]. Ova konstanta se naziva **Skolemova konstantna**. Mi na ovaj način zapravo dajemo ime nečemu što mora postojati, jer ako je formula sa egzistencijalnim kvantifikatorom istinita, mora postojati bar jedna zamjena. Naravno, ime objekta ne smije pripadati nekom postojećem objektu iz BZ (jer ne možemo tvrditi da upravo taj objekat zadovoljava iskaz sa egzistencijalnim kvantifikatorom).

„Postoji zdrava hrana” bi se zapisalo kao  $\exists x (HRANA(x) \wedge ZDRAVA(x))$

Prilikom eliminisanja kvantifikatora,  $x$  bi zamijenili nekom konstantom koja ne postoji u BZ, npr.  $ZDRAVA\_HRANA$ , što je u redu jer u BZ postoji bar jedna zdrava hrana, a mi smo dodali još jednu.

Kada se ( $\exists$ ) nalazi ispred promjenljive ( $y$ ), i u doseg u univerzalnog kvantifikatora:

$$\forall x (\exists y P(x,y)),$$

znači da postoji neko  $y$  koje na neki način zavisi od (konkretnog)  $x$ . U ovom slučaju uvodimo novi simbol za  $y$  u obliku funkcije koja zavisi od  $x$ , ( $y = f(x)$  – Skolemova funkcija), jer je  $y$  različit za svako odabrano  $x$ . Nakon eliminisanja kvantifikatora, gornji iskaz se svodi na

$$P(x,f(x))$$

Na primjer, rečenica "Svako voli nekoga."

$$\forall x \exists y VOLI(x,y).$$

bi postala, nakon uklanjanja kvantifikatora

$$VOLI(x,f(x)).$$

Novodobijena BZ nije logički ekvivalentna sa polaznom, ali je zadovoljena tačno kada i originalna BZ.

Rečenica dobijena izostavljanjem univerzalnog kvantifikatora može poslužiti za generisanje velikog broja različitih posljedica (kada se umjesto variable, uzme neki konkretan term). S druge strane, uklanjanjem egzistencijalnog kvantifikatora, dobija se samo jedna rečenica. Striktno govoreći, početna BZ i ovako dobijena nijesu logički ekvivalentne, ali se pokazuje da su ekvivalentne u smislu da je novodobijena baza zadovoljena, tačno kada je i originalna BZ zadovoljena. Bitno je primijetiti da se u predikatskoj logici prvog reda kvantifikacija odnosi samo na variable (objekte u domenu D), a ne na odnose (predikatski ili funkcijski simbol) u domenu D.

### Algoritam za preslikavanje formula predikatske logike u klauzule.

Kada se govorilo o propozicionoj logici, posebna je pažnja posvećena zaključivanju korišćenjem pravila koje smo nazvali rezolucija. Sastavni dio rezolucije jeste predstavljanje iskaza u konjunktivnoj normalnoj formi. Postavlja se pitanje da li je i u predikatskoj logici moguće bilo koji iskaz napisati u obliku normalizovanih klauzula. Odgovor je potvrđan. Algoritam za preslikavanje formula predikatske logike u klauzule [4] je:

**Korak 1. Eliminirati sve implikacije:** Zamijeniti implikacije ( $\Rightarrow$ ) negacijama i disjunkcijama ( $\neg$  i  $\vee$ ), koristeći zakon uklanjanja implikacije ( $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ ). Ukoliko ovo primijenimo na rečenicu 3, Primjera 3, dobijamo:

$$\forall x \neg (DIJETE(x) \wedge \exists y (JEDE(x, y) \wedge KEKS(y)) \vee VOLI(MARKO, x))$$

**Korak 2. Redukcija dosega negacije:** Pomaknuti negacije do atomskih predikata, tj. zamijeniti operator negacije, koristeći jednu od narednih tautologija:

$$1. \quad (\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$$

$$2. \quad (\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B),$$

$$3. \quad \neg \neg A \Rightarrow A,$$

$$4. \quad (\neg(\forall x A(x))) = (\exists x (\neg A(x)))$$

$$5. \quad (\neg(\exists x A(x))) = (\forall x (\neg A(x)))$$

U kontekstu razmatranog primjera, dobili bi:

$$\forall x (\neg DIJETE(x) \vee \neg \exists y (JEDE(x, y) \wedge KEKS(y)) \vee VOLI(MARKO, x)),$$

odnosno:

$$\forall x (\neg DIJETE(x) \vee \forall y \neg (JEDE(x, y) \wedge KEKS(y)) \vee VOLI(MARKO, x)),$$

što se dalje može pisati kao:

$$\forall x (\neg DIJETE(x) \vee \forall y (\neg JEDE(x, y) \vee \neg KEKS(y)) \vee VOLI(MARKO, x))$$

**Korak 3. Preimenovati varijable u opsegu važenja kvantifikatora u istoj složenoj formuli:** Preimenovati  $\exists x$  u  $\exists y$  kada je  $\{\exists x\}$  podskup od  $\{\forall x\}$ .

U posmatranom primjeru se već koriste različiti nazivi za varijable, pa nema potrebe za preimenovanjem. Trebalo bi izvršiti preimenovanje u sljedećim situacijama:

$$\forall x (P(x) \Rightarrow (\exists x Q(x))),$$

gdje formule  $P$  i  $Q$  trebaju sadržati različite varijable (npr.  $x, y$ ), odnosno trebali bi pisati:

$$\forall x (P(x) \Rightarrow (\exists y Q(y)))$$

Doseg varijable je samo unutar formula koje se nalazi neposredno nakon kvantifikatora.

**Korak 4. Pomjeriti kvantifikatore na početak izraza bez promjene njihovog redoslijeda.**

Ukoliko bi se korak četiri primijenio na naš primjer, dobili bi:

$$\forall x \forall y \neg DIJETE(x) \vee \neg JEDE(x, y) \vee \neg KEKS(y) \vee VOLI(MARKO, x),$$

oslobodili smo se i zagrada jer je ovo dijunkcija i nema potrebe za njima.

**Korak 5. Eliminirati kvantifikatore primjenjujući ranije opisanu Skolemovu funkciju.** Naš bi primjer postao:

$$\neg DIJETE(x) \vee \neg JEDE(x, y) \vee \neg KEKS(y) \vee VOLI(MARKO, x)$$

**Korak 6. Postaviti rezultujući izraz u konjunktivnu normalnu formu:** Konjunktijom složene formule se rastavljaju i pišu svaka posebno. Tako bi originalni izraz  $(A \vee (B \wedge C))$  zapisali kao konjunktiju:  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ . U našem primjeru smo već dobili željenu formu – CNF i nema potrebe za dodatnim modifikacijama.

**Korak 7. Zapisati po jednu klauzulu po liniji:** Zapisati klauzule kao odvojene formule:

$$1. (A \vee B)$$

$$2. (A \vee C)$$

Nakon izvedenog preslikavanja dobija se skup normaliziranih klauzula, koji predstavlja stanje svijeta u CNF.

**Izjednačavanje atomskih predikata (unifikacija)**

Dakle, za razliku od propozicione logike kod koje su atomske formule mogle biti jednake ili ne (jednake su ako su to dva ista propoziciona simbola), u predikatskoj logici, predikati sa istim predikatskim simbolom ne moraju biti jednaki. Predikati su jednaki ukoliko se nađe adekvatna zamjena promjenljivih koja bi ih učinila jednakim. Dva predikata  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$  i  $Q(s_1, s_2, \dots, s_n)$  mogu biti izjednačena ukoliko termini  $t_i$  mogu biti zamijenjeni sa terminima  $s_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , ili obratno. Tako se predikat  $VOLI(MARIJA, y)$  i  $VOLI(x, OTAC(x))$  može unificirati zamjenom  $S=\{MARIJA/x, OTAC(MARIJA)/y\}$ . Skup  $S$  uključuje sve moguće zamjene, svaki term se poveže sa odgovarajućom substitucijom. Svako pojavljivanje varijable  $x$  se zamjenjuje konstantom  $MARIJA$ , i svako pojavljivanje varijable  $y$  se zamjenjuje konstantom  $OTAC(MARIJA)$  i dobija se predikat  $VOLI(MARIJA, OTAC(MARIJA))$  – Marija voli svog oca.

Da bi se mogla izvršiti unifikacija, potrebno je da budu zadovoljni sljedeći uslovi:

1. Oba predikata koja se unificiraju-izjednačavaju moraju imati jednak broj termova.
2. Nijedan od termova, ni  $t_i$  ni  $s_i$  ne smije biti negacija ili funkcija različitih varijabli. Ako je  $t_i$  term sadrži  $s_i$  i obratno, ne može se izvršiti izjednačavanje. Ovo se može, na primjer, desiti ukoliko je  $t_i$  varijabla, a  $s_i$  funkcija u kojoj se ta varijabla pojavljuje, npr.  $f(t_i)$ . Sada se varijabla  $t_i$  i  $s_i$  ne mogu izjednačiti, jer bi to kreiralo beskonačnu sekvencu  $f(f(f(\dots)))$ . Ovaj proces se naziva *ispitivanje na pojavu*.

**Pri izjednačavanju se mora voditi računa o tome da je doseg varijabli unutar jedne klauzule, te svaku zamjenu varijable treba dosljedno provesti u cijeloj klauzuli!!!**

*Primjer 4. Provjeriti da li je moguće izvršiti izjednačavanje sljedećih iskaza i dati skup  $S$  koji uključuje sve moguće substitucije.*

$$1. P1(A, B)$$

$$2. ((\neg P1(x, B)) \vee P2(x, C))$$

*U datom primjeru  $P1$  i  $P2$  su predikatski simboli,  $A$  i  $B$  su konstante, a  $x$  je varijabla.*

*Rješenje: Posmatranjem predikata  $P1$  zaključuje se da je moguće izvršiti zamjenu  $x=A$ . Ovu zamjenu moramo izvršiti u cijeloj klauzuli 2, jer je doseg varijable  $x$  unutar cijele klauzule. Stoga se dobija:*

$$1. P1(A, B)$$

$$2. ((\neg P1(A, B)) \vee P2(A, C))$$

*Skup parova varijabli i pripadne supstitucije je  $S=\{x/A\}$ .*

*Primjer 5. Posmatrajmo sada sljedeći primjer, preuzet iz [5]. Potrebno je izvršiti razrješavanje sljedećih iskaza, ukoliko je moguće:*

$$1. Q1(y, z)$$

$$2. ((\neg Q1(A, x)) \vee R2(x, B))$$

*Jasno je da je moguće izvršiti supstituciju  $y=A$ , za prvi term u prvoj klauzuli. Drugi term kod predikata  $Q$  i u prvoj i u drugoj klauzuli je varijabla. Možemo je zamijeniti nekom konstantnom, npr:  $z=C$  u prvoj klauzuli, te  $x=C$  u drugoj, čime dobijamo:*

$$1. Q1(A,C)$$

$$2. ((\neg Q1(A, C)) \vee R2(C,B))$$

Međutim, postoji i opštije rješenje: Ako se u prvoj klauzuli izvrši zamjena  $z=x\_novo$ , te  $x=x\_novo$  u drugoj, dok ostaje  $y=A$ , čime dobijamo:

$$1. Q1(A, x\_novo)$$

$$2. ((\neg Q1(A, x\_novo)) \vee R2(x\_novo,B))$$

Vidjećemo u nastavku da se i u predikatskoj logici može vršiti razrješavanje (pravilo rezolucije, slično onom u propozicionoj logici) i da bi razriješena klauzula dobijena nakon prve zamjene bila  $R2(C,B)$ , a nakon druge  $R2(x\_novo,B)$ , koja je opštija i moći će bolje da se iskoristi u daljem procesu zaključivanja. Naime, ovakvu složenu formulu je moguće i dalje koristiti u procesu unifikacije. Dakle, prilikom izjednačavanja, traži se zamjena koja daje najopštije rješenje, unifikator (skup supstitucijskih parova –  $S$ ) je tada MGU (engl. most general unifier).

Ukoliko u dva predikata koji pripadaju različitim klauzulama imamo varijablu sa istim imenom, ta varijabla ne mora da se odnosi, i u principu se ne odnosi, na isti objekat. U ovom slučaju, da ne bi varijabla sa istim imenom uzrokovala konfuziju, prije unifikacije preimenujemo varijable, tako da se u dvije različite klauzule ne pojavljuju varijable sa istim imenom. Na primjer, ukoliko imamo

$$1. Q1(x) \vee Q2(x,y)$$

$$2. \neg Q1(A) \vee Q3(B,x)$$

$x$  iz klauzule 1 i  $x$  iz klauzule 2, mogu da se odnose na različite objekte, pa prije unifikacije promjenljivoj  $x$  damo različita imena u različitim klauzulama, na primjer:

$$1. Q1(x1) \vee Q2(x1,y)$$

$$2. \neg Q1(A) \vee Q3(B,x2)$$

Naravno, svako pojavljivanje promjenljive  $x$  u prvo klauzuli smo zamijenili novim imenom te promjenljive, jer je doseg varijabli unutar jedne klauzule. Sada smo sigurni da se nakon unifikacije dobija,  $S=\{x1/A\}$ :

$$1. Q1(A) \vee Q2(A,y)$$

$$2. \neg Q1(A) \vee Q3(B,x2)$$

Prije navođenja pravila zaključivanja, kojima se može vršiti automatsko dokazivanje teorema, potrebno je dati definiciju teorema i aksioma u predikatskoj logici. Istinite formule koje se odnose na domen modela i nastale su prilikom formiranja BZ prolaženjem kroz funkcije i predikate i zapisivanjem onoga šta se zna u zavisnosti od ostalih simbola se nazivaju aksiome. Dakle, to su neke opšte poznate formule za posmatrani domen. S druge strane teoreme su formule za koje se želi dokazati da važe na osnovu aksioma. Način na koji se dokazuje teorema naziva se pravilo dokazivanja.

Postoji veliki broj pravila dokazivanja u predikatskoj logici, mi ćemo u ovom kursu navesti neke od njih. Procedure dokazivanja koriste manipulacije, koje se nazivaju zdrava pravila zaključivanja, koje generišu nove DFF iz starih tako da ako su stari izrazi istiniti, garantovano je da će i novi izrazi biti istiniti (dosljedna pravila zaključivanja). U predikatskoj logici se mogu za dokazivanje koristiti pravila



zaključivanja definisana u propozicionoj logici, uz male, ili bez ikakvih modifikacija. Modus Ponens se, na primjer, može koristiti na isti način kao u propozicionoj logici.

### **Robinson-ovo pravilo zaključivanja – pravilo rezolucije u predikatskoj logici**

Posmatrajmo predikate  $P$ ,  $Q1$ ,  $Q2$  i  $R$ . Pretpostavimo da odgovarajućom zamjenom  $S$  dobijamo,  $Q1 [S] = Q2 [S]$ , onda  $(P \vee Q1) \wedge (\neg Q2 \vee R)$  sa  $Q1 [S] = Q2 [S]$  daje  $(P \vee R) [S]$ . Ovo se simbolički može napisati kao:

$$\frac{(P \vee Q1), (\neg Q2 \vee R) \quad Q1 [S] = Q2 [S]}{(P \vee R) [S]} \dots\dots\dots(1.1)$$

Gornje pravilo se naziva Robinsonovim pravilom zaključivanja ili rezolucijskim principom u predikatskoj logici.

Sljedeći primjer ilustruje navedeno pravilo. Neka su dati predikatski iskazi:

1.  $P = VOLI(x, OTAC\_OD(x))$ ,
2.  $Q1 = DRAG(x, MAJKA\_OD(x))$ ,
3.  $Q2 = DRAG(MIRKO, y)$ ,
4.  $R = MRZI(x, y)$ .

povezani gore pominjanim iskazom  $(P \vee Q1) \wedge (\neg Q2 \vee R)$  i neka je primijenjeno Robinsonovo pravilo zaključivanja. Može se izvršiti izjednačavanje  $Q1$  i  $Q2$ , i dobija se:

$$Q=Q1=Q2=DRAG(MIRKO, MAJKA\_OD(x)) \text{ i } S=\{x=MIRKO, y=MAJKA\_OD(x)\},$$

odnosno,

$$Q=Q1=Q2=DRAG(MIRKO, MAJKA\_OD(MIRKO)), \text{ i } S=\{x=MIRKO, y=MAJKA\_OD(MIRKO)\}$$

Dok će rezolvent biti  $(P \vee R) [S]$  (1.1), odnosno:

$$(P \vee R) [S] = (VOLI(x, OTAC\_OD(x)) \vee MRZI(x, y)) S=\{x=MIRKO, y=MAJKA\_OD(MIRKO)\},$$

što daje krajnji zaključak:

$$(VOLI(MIRKO, OTAC\_OD(MIRKO)) \vee MRZI(x, MAJKA\_OD(MIRKO)))$$

**Dokazivanje teorema rezolutivnim principom predikatske logike**, možemo pokazati kroz primjer. Pravilo rezolucije se sastoji od istih koraka kao u propozicionoj logici. Naime, sve aksiome se zapisuju u konjunktivnoj normalnoj formi, doda im se negirana teorema, nakon toga se vrši unifikacija i rezriješavanje primjenom Robinsonovog pravila. Postupak razriješavanja se vrši sve dok se ne dobije prazna klauzula  $\emptyset$ – kontradikcija, ili nije moguće vršiti dalje razriješavanje. Prvi slučaj znači da je teorema dokazana, dok drugi slučaj znači da na osnovu datih aksioma nije moguće dokazati teoremu.

Primjer 6. Potrebno je na osnovu aksioma:

1.  $A1 = KEKS(MEDENO\_SRCE)$ .
2.  $A2 = DIJETE(MARIJA) \wedge JEDE(MARIJA, MEDENO\_SRCE)$ .
3.  $A3 = \forall x (DIJETE(x) \wedge \exists y (JEDE(x, y) \wedge KEKS(y))) \Rightarrow VOLI(MARKO, x)$

dokazati da važi teorema  $A4 = VOLI(MARKO, MARIJA)$ .

Prilikom dokazivanja tražene teoreme, potrebno je prvo preslikati sve aksiome u klauzule, da bi se mogao koristiti pravilo rezolucije:

1.  $A1 = KEKS(MEDENO\_SRCE)$ . – već je klauzula

$A2 = DIJETE(MARIJA) \wedge JEDE(MARIJA, MEDENO\_SRCE)$ . – može se pretvoriti u klauzulu razbijanjem na dvije klauzule:

2.  $DIJETE(MARIJA)$
3.  $JEDE(MARIJA, MEDENO\_SRCE)$

$A3 = \forall x (DIJETE(x) \wedge \exists y (JEDE(x, y) \wedge KEKS(y))) \Rightarrow VOLI(MARKO, x)$  već smo je prebacili u klauzule u ranijem tekstu i dobili:

4.  $\neg DIJETE(x) \vee \neg JEDE(x, y) \vee \neg KEKS(y) \vee VOLI(MARKO, x)$

Ovome treba dodati negaciju cilja – teoreme koju želimo dokazati, te dobijamo:

5.  $A4 = \neg VOLI(MARKO, MARIJA)$

Pokušavamo povezati klauzule koje se mogu unificirati, a jedna je term, a druga term sa negacijom. Posmatrajmo 4 i 5 i neka je unifikacija izvršena zamjenom  $S = \{x = MARIJA, y = MEDENO\_SRCE\}$ , nakon čega dobijamo rezolvent:

$$\neg DIJETE(MARIJA) \vee \neg JEDE(MARIJA, y) \vee \neg KEKS(y)$$

Povežimo ga sa 1., izvršimo unifikaciju zamjenom promjenljive  $y$ , nakon čega je  $S = \{x = MARIJA, y = MEDENO\_SRCE\}$ , i dobijamo rezolvent:

$$\neg DIJETE(MARIJA) \vee \neg JEDE(MARIJA, MEDENO\_SRCE)$$

Povežimo ga sa 2, dobijamo  $\neg JEDE(MARIJA, MEDENO\_SRCE)$ , što spajanjem sa 3 daje kontradikciju –  $\emptyset$ , čime je teorema dokazana. Dakle, Marko voli Mariju.

### **Minimum zahtijevanog znanja sa četvrtog termina**

1. Po čemu se predikatska logika razlikuje od propozicione logike?
2. Šta čini model predikatske logike, a šta domen modela?
3. Šta je atomska rečenica u predikatskoj logici?
4. Šta je dobro formirana formula u predikatskoj logici?
5. Koji se simbol povezivanja koristi uz univerzalni kvantifikator, a koji uz egzistencijalni? Obrazložiti.
6. Kada je moguće izvršiti unifikaciju dva predikata?
7. Svaki student će dobiti po jedan primjer u kojem je neophodno izvršiti unifikaciju predikata.
8. Svaki student će dobiti par iskaza koje je neophodno pretvoriti u dobro formirane formule predikatske logike.
9. Svaki student će dobiti iskaz za koji treba da odredi konjunktivnu normalnu formu.
10. Konkretni primjer sa dokazivanjem rezolucijom.

## LITERATURA

- [1] Polišćuk, E.J.: *Ekspertni sistemi*, Informatička literatura JEP (vlastito izdanje), Podgorica, 2004. Joseph C. Giarratano, Gary D. Riley.: *Expert Systems: Principles and Programming*, Prentice Hall, 2nd ed., 2002.
- [2] Russell S., Norvig P.: *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, Prentice Hall, NJ, 1995.
- [3] <http://ri4es.etf.rs/predavanja.html>, posljednji put pristupano, 08. 02. 2010. godine.
- [4] Konar A.: *Artificial Intelligence and Soft Computing: Behavioral and Cognitive Modeling of the Human Brain*, CRC Press, December 8, 1999.
- [5] <http://www.zemris.fer.hr/predmeti/tes/nastava.html> - zadnji put pristupano, 10. 02. 2010. godine.